Гордуновский В.М., Самохвалов С.Ю.

Обобщённая линейная модель оптимизации пакета реальных инвестиций.

Одной из главных составляющих процесса анализа инвестиционных проектов является анализ их коммерческой эффективности. На основе построения математической модели пакета предполагаемых инвестиций и применении критериев эффективности, использующих дисконтированные денежные потоки, рассматривается метод оптимизации пакета реальных инвестиций. Исходными данными математической модели являются: денежный поток C_{it}, где i – номер инвестиционного проекта (изменяется от *1* до m), t – интервал времени (изменяется от *0* до T), r – ставка процента. Для построения математической модели обозначим неизвестные. За x_i примем долю финансового участия компании-инвестора в финансировании i-го проекта ($0 \le x_i \le 1$). Среди критериев эффективности пакета реальных инвестиций доминирующую роль играют следующие:

1) Сумма дисконтированных чистых поступлений *NPV*:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge npv_p$, где npv_p - предельная сумма дисконтированных чистых поступлений;

2) Внутренняя норма доходности *IRR*:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \ge 0$, где cc – средневзвешенная стоимость капитала;

3) Индекс рентабельности *PI*:

$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\ge 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+r)^t}} \ge pi_p$, где pi_p - предельное значение индекса рентабельности;

4) Дисконтный срок окупаемости *DPP*:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \ge 0$, где dpp_p - предельное значение срока окупаемости.

5) Сумма наращенных чистых поступлений *NTV*:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i \ge ntv_p$, где ntv_p - предельная сумма наращенных чистых поступлений;

6) Модифицированная внутренняя норма доходности *MIRR* (применяется в тех случаях, когда в пакете из m рассматриваемых инвестиций, присутствуют проекты с неординарными денежными потоками):

$\frac{\sqrt[T]{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\ge 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i}}{\sqrt[T]{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+cc)^t}}} \ge 1+cc$ (cc – средневзвешенная стоимость капитала).

Для построения оптимизационной задачи возьмём один из критериев в качестве целевой функции, а остальные в виде ограничений. Так, если *NPV* – целевая функция, то с учётом ограничений по сумме инвестиций по периодам t (обозначим b_t - предельные суммы инвестиций по периодам t) получим следующую линейную модель формирования оптимального пакета инвестиций.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\to\max.$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\geq 0.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}+pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i\geq ntv_p.$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i+(1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\geq 0.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\leq b_t.$$

Долевые условия:

$$x_i\geq 0;\ x_i\leq 1;\ i=1,...,m.$$

Если в качестве целевой функции выбран индекс рентабельности (нелинейная функция), то задача приводится к линейной путём введения новых переменных:

$$z_0=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|x_i}{(1+r)^t}};\ z_i=z_0x_i$$

После подстановки переменных z_0, z_i вместо x_i получаем линейную задачу оптимизации пакета реальных инвестиций по критерию максимума индекса рентабельности.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}\to\max.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}-(npv_p)z_0\geq 0.$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+cc)^t}\geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}z_i-(ntv_p)z_0\geq 0.$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}z_i+(1+cc)^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}z_i}{(1+cc)^t}\geq 0.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}z_i}{(1+r)^t}-b_t z_0\leq 0.$$

Зависимость, связывающая переменные z_i между собой:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{|c_{it}|z_i}{(1+r)^t}=1.$$

Долевые условия:

$$z_0\geq 0;\ z_i\geq 0;\ z_i\leq z_0;\ i=1,...,m.$$

После определения оптимальных значений z_i и z_0 доли участия в инвестиционных проектах x_i вычисляются по формулам $x_i=\frac{z_i}{z_0}$, $i=1,...,m$.

Линейная модель с внутренней нормой доходности в качестве целевой функции имеет вид:

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\rightarrow \max.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq npv_p.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}+pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\geq 0.$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i\geq ntv_p.$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i+(1+cc)^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t}\geq 0.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\leq b_t.$$

Долевые условия:

$$x_i\geq 0;\ x_i\leq 1;\ i=1,...,m.$$

При оптимизации по критерию суммы наращенных чистых поступлений математическая модель имеет следующий вид:

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i \to \max.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq npv_p.$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \geq 0.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} + pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq 0.$$

Ограничение по модифицированной внутренней норме доходности

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i + (1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \geq 0.$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} - \sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \leq b_t.$$

Долевые условия:

$$x_i \geq 0;\ x_i \leq 1;\ i = 1,...,m.$$

Если в качестве целевой функции взять модифицированную внутреннюю норму доходности, то получим следующую задачу:

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}(1+cc)^{T-t}c_{it}x_i + (1+cc)^T\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \to \max.$$

Ограничение по сумме дисконтированных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq npv_p.$$

Ограничение по внутренней норме доходности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+cc)^t} \geq 0.$$

Ограничение по индексу рентабельности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}\geq 0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} + pi_p\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0,C_{it}<0}^{T}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq 0.$$

Ограничение по дисконтному сроку окупаемости:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{dpp_p}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t} \geq 0.$$

Ограничение по сумме наращенных чистых поступлений:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{T-t}c_{it}x_i \geq ntv_p .$$

Ограничения максимальных сумм инвестиций по периодам:

$$-\sum_{i=1,C_{it}\geq 0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1,C_{it}<0}^{m}\frac{c_{it}x_i}{(1+r)^t}\leq b_t .$$

Долевые условия:

$$x_i \geq 0;\ x_i \leq 1;\ i=1,\ldots,m .$$

Задачи оптимизации пакета инвестиций решаются с помощью табличного процессора “Excel”, либо с помощью специальной компьютерной программы ”Оптимум”, разработанной в МГИМО.

Повышению обоснованности принимаемых инвестиционных решений способствуют следующие результаты данной работы. Обобщённая математическая постановка позволяет применить одновременно большое количество критериев эффективности для формирования оптимального пакета инвестиций из множества проектов с заданными денежными потоками. Линейная постановка позволяет для получения оптимального решения ограничиться широко распространёнными алгоритмами линейного программирования.