Оптимизационная модель управления кредитами предприятия.

Гордуновский В.М., Сернова Н.В., Самохвалов С.Ю.

Требуется определить, как наилучшим образом в рамках заданного периода планирования взять кредиты, чтобы обеспечить плановые расходы и доходы. Задача управления кредитами состоит в том, чтобы определить оптимальные сроки и время кредитования с точки зрения минимальной суммы выплаты по процентам.

Рассмотрим следующую типичную задачу. Предприятие определяет оптимальную кредитную политику на срок 6 месяцев. Задана сумма остатков на начало планового периода S (сумма остатков). Имеются потенциальные кредиторы. Предложения по срокам и процентам сведены в следующую таблицу, где проценты по одномесячному кредиту обозначены $P^{(1)}$, проценты по трёхмесячному кредиту $P^{(3)}$, проценты по шестимесячному кредиту $P^{(6)}$:

№	Форма кредитования	Процент	Срок
1.	1-месячный кредит:	$P^{(1)}$	1
2.	3-месячный кредит:	$P^{(3)}$	3
3.	6-месячный кредит:	$P^{(6)}$	6

Так как плановый период равен 6 месяцам, а кредиты краткосрочные, то возникает множество вариантов получения кредитов. Можно, например, каждый месяц брать одномесячные кредиты, либо дважды взять кредиты на три месяца, либо как - то комбинировать все эти три формы кредитования между собой в течение полугода. При этом ещё необходимо учитывать заданную на начало периода сумму остатков и запланированные на полугодие ежемесячные текущие расходы и доходы предприятия.

Построим математическую модель этой задачи. Чтобы ввести необходимые обозначения переменных, построим таблицу:

Форма кредитования	Потенциальная возможность получения кредита по месяцам планового периода					
	1	2	3	4	5	6
1-месячный кредит:	X	X	X	X	X	X
3-месячный кредит:	X	X	X	X		
6-месячный кредит:	X					

В этой таблице крестиком помечена потенциальная возможность получения кредита без учёта начальной суммы остатков и сумм текущих ежемесячных расходов и доходов. На основе вышеприведенной таблицы введём условные обозначения неизвестных. Неизвестными являются суммы кредитов по месяцам и формам кредитования. Обозначим неизвестную сумму одномесячного кредита в первый месяц планового периода $x_{(1)}^{(1)}$; одномесячный кредит во второй месяц $x_{(2)}^{(1)}$ и так далее до шестого месяца; трёхмесячный кредит в первый месяц $x_{(1)}^{(3)}$; трёхмесячный кредит во второй месяц $x_{(2)}^{(3)}$ и т.д.; шестимесячный кредит в первый месяц $x_{(1)}^{(6)}$. Обозначения представлены в следующей таблице:

Форма кредитования	Обозначения неизвестных кредитов по месяцам планового периода с учётом формы кредитования					
	1	2	3	4	5	6
1-месячный кредит:	$x_{(1)}^{(1)}$	$x_{(2)}^{(1)}$	$x_{(3)}^{(1)}$	$x_{(4)}^{(1)}$	$x_{(5)}^{(1)}$	$x_{(6)}^{(1)}$
3-месячный кредит:	$x_{(1)}^{(3)}$	$x_{(2)}^{(3)}$	$x_{(3)}^{(3)}$	$x_{(4)}^{(3)}$		
6-месячный кредит:	$x_{(1)}^{(6)}$					

Планируемые текущие расходы: за первый месяц $E_{(1)}$; за второй $E_{(2)}$ и так далее до конца периода. Расходы в следующий за плановым периодом месяц (седьмой) обозначим $E_{(7)}$. Предприятие планирует также на каждый месяц сумму доходов. Обозначим доходы в первом месяце планового периода $R_{(1)}$; во втором $R_{(2)}$ и так далее до следующего за плановым периодом месяца.

Составим математическую модель процесса кредитования на полугодие, используя для этого приведенные выше обозначения. Найдём денежный поток за первый месяц:

Доходы	Обозначения
начальная сумма	сумма остатков S
1-месячный кредит	$x_{(1)}^{(1)}$
3-месячный кредит	$x_{(1)}^{(3)}$
6-месячный кредит	$x_{(1)}^{(6)}$
текущие доходы	$R_{(1)}$

Расходы	Обозначения
Возврат кредитов	нет
возврат процентов	нет
текущие расходы	$E_{(1)}$

Итого	Обозначения
денежный поток	$S + x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + R_{(1)} - E_{(1)}$
Ограничение денежного потока	$S + x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + R_{(1)} - E_{(1)} \geq 0$

Как видно из таблицы, денежный поток за первый месяц рассчитывается следующим образом: сумма остатков S плюс неизвестные величины кредитов $x_{(1)}^{(1)}, x_{(1)}^{(3)}, x_{(1)}^{(6)}$ плюс текущие доходы $R_{(1)}$ и минус плановые текущие расходы $E_{(1)}$ за первый месяц. Ограничение представляет собой условие неотрицательности денежного потока. Перенесём для удобства константы этого ограничения в правую часть, получим:

$$x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} \geq E_{(1)} - R_{(1)} - S$$

Денежный поток за второй месяц рассчитывается следующим образом:

Доходы	Обозначения
сумма на начало месяца	$S + x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + R_{(1)} - E_{(1)}$
1-месячный кредит	$x_{(2)}^{(1)}$
3-месячный кредит	$x_{(2)}^{(3)}$
6-месячный кредит	нет
текущие доходы	$R_{(2)}$

Расходы	Обозначения
возврат кредита	$x_{(1)}^{(1)}$
возврат процента	$P^{(1)} x_{(1)}^{(1)}$
текущие расходы	$E_{(2)}$

Итого	Обозначения
денежный поток	$S + x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + R_{(1)} - E_{(1)} + x_{(2)}^{(1)} + x_{(2)}^{(3)} + R_{(2)} - x_{(1)}^{(1)} - p^{(1)} x_{(1)}^{(1)} - E_{(2)}$
ограничение денежного потока	$S + x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + R_{(1)} - E_{(1)} + x_{(2)}^{(1)} + x_{(2)}^{(3)} + R_{(2)} - x_{(1)}^{(1)} - p^{(1)} x_{(1)}^{(1)} - E_{(2)} \geq 0$

Таким образом, во второй месяц имеем: сумму, оставшуюся от первого месяца $S + x_{(1)}^{(1)} + x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + R_{(1)} - E_{(1)}$, плюс сумма одномесячного кредита $x_{(2)}^{(1)}$, который может быть взят во втором месяце, плюс сумма трёхмесячного кредита $x_{(2)}^{(3)}$, который может быть взят во втором месяце, плюс текущие доходы $R_{(2)}$, минус сумма одномесячного кредита $x_{(1)}^{(1)}$, выданного в первом месяце, минус процент по этому кредиту $P^{(1)} x_{(1)}^{(1)}$, минус плановые текущие расходы за второй месяц $E_{(2)}$. Ограничение для второго месяца представляет собой условие неотрицательности денежного потока. После преобразований ограничение денежного потока во втором месяце планового периода имеет следующий вид:

$$x_{(1)}^{(3)} + x_{(1)}^{(6)} + x_{(2)}^{(1)} + x_{(2)}^{(3)} - p^{(1)} x_{(1)}^{(1)} \geq E_{(1)} + E_{(2)} - R_{(1)} - R_{(2)} - S$$

Аналогично записываются ограничения для остальных месяцев планового периода. Чтобы привести задачу к удобному для расчётов на компьютере виду (1), дадим переменным новые обозначения:

Старые обознач.	Новые обознач.	Старые обознач.	Новые обознач.	Старые обознач.	Новые обознач.
$x_{(1)}^{(1)}$	x_1	$x_{(1)}^{(3)}$	x_7	$x_{(1)}^{(6)}$	x_{11}
$x_{(2)}^{(1)}$	x_2	$x_{(2)}^{(3)}$	x_8		
$x_{(3)}^{(1)}$	x_3	$x_{(3)}^{(3)}$	x_9		
$x_{(4)}^{(1)}$	x_4	$x_{(4)}^{(3)}$	x_{10}		
$x_{(5)}^{(1)}$	x_5				
$x_{(6)}^{(1)}$	x_6				

Правые части системы ограничений обозначим:

$$B_i = \sum_{k=1}^{k=i} E_{(k)} - \sum_{k=1}^{k=i} R_{(k)} - S;\ i=1,...,7.$$

Так как в следующем за плановым периодом седьмом месяце предполагается возврат всех кредитов и процентов по ним, то баланс расходов для седьмого месяца с учётом текущих расходов и доходов включается в систему ограничений. Таким образом, система ограничений данной задачи состоит из семи ограничений по месяцам и имеет следующий вид:

$$x_1 + x_7 + x_{11} \geq B_1;$$

$$-p^{(1)} x_1 + x_2 + x_7 + x_8 + x_{11} \geq B_2;$$

$$-\sum_{k=1}^{2} p^{(1)} x_{(k)} + x_3 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} \geq B_3;$$

$$-\sum_{k=1}^{3} p^{(1)} x_{(k)} + x_4 - p^{(3)} x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq B_4;$$

$$-\sum_{k=1}^{4} p^{(1)} x_{(k)} + x_5 - \sum_{k=7}^{8} p^{(3)} x_{(k)} + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq B_5;$$

$$-\sum_{k=1}^{5} p^{(1)} x_{(k)} + x_6 - \sum_{k=7}^{9} p^{(3)} x_{(k)} + x_{10} + x_{11} \geq B_6;$$

$$-\sum_{k=1}^{6} p^{(1)} x_{(k)} - \sum_{k=7}^{10} p^{(3)} x_{(k)} - p^{(6)} x_{11} \geq B_7;$$

$$x_j \geq 0, j=1,...,11.$$

Эффективность использования кредитов определяется в начале седьмого месяца, когда будут выплачены все кредиты и все проценты по кредитам за шесть месяцев. По условию задачи необходимо взять кредиты таким образом, чтобы сумма выплат по процентам была минимальна. Поэтому, в качестве целевой функции задачи возьмём сумму выплат долгов по процентам при обслуживании кредитов предприятия в рассматриваемом периоде планирования:

$$F_x = \sum_{k=1}^{6} p^{(1)} x_{(k)} + \sum_{k=7}^{10} p^{(3)} x_{(k)} + p^{(6)} x_{11} \to \min.$$

Математическая постановка задачи управления кредитами предприятия относится к задачам линейного программирования и решается соответствующими методами. Решением задачи является оптимальная стратегия использования кредитов с точки зрения достижения наименьшей суммы выплат долга по процентам.