Оптимизационные модели управления капиталовложениями в инвестиционные проекты.

Гордуновский В.М.

В этой статье рассматриваются задачи выбора пакета инвестиционных программ, который при имеющихся ресурсах давал бы наибольший эффект от долгосрочных капитальных вложений.

Рассмотрим следующую задачу выбора пакета инвестиционных программ. Фирма имеет достаточно средств, чтобы решиться на инвестирование своих капиталов в долгосрочные проекты. Предположим, имеется четыре проекта A, B, C и D. Известны денежные потоки по всем проектам и альтернативная стоимость капитала r. Следовательно, можно вычислить чистую приведенную стоимость по формуле $npv = \sum_i \frac{c_i}{(1+r)^i}$, приведенную стоимость по формуле $pv = \sum_{i,\, c_i > 0} \frac{c_i}{(1+r)^i}$ и индекс рентабельности $индекс\ рентаб. = \frac{pv}{\sum_{i,\, c_i < 0} \frac{|c_i|}{(1+r)^i}}$ для каждого проекта.

Для построения математической модели процесса инвестирования введём необходимые обозначения. Для начала будем рассматривать инвестиционные проекты, которые допускают долевое участие компаний в их осуществлении. Другими словами, компания-инвестор имеет возможность, исходя из собственного бюджета, принимать решение о полном, либо частичном (совместно с другими инвесторами) финансировании проекта. Обозначим неизвестные переменные: x_1 - доля финансового участия компании-инвестора в проекте A; x_2, x_3, x_4 - доли финансового участия компании-инвестора в проектах B,C,D соответственно. Диапазон изменения переменных от 0 (отказ от финансирования проекта) до 1 (полное финансирование проекта). Исходные данные по проектам и расчёт финансовых показателей представлены в следующей таблице (в усл. единицах):

Проект	Потоки платежей			*N*PV при 10%	Индекс рентаб.
	C_0	C_1	C_2		
A	-10	30	5	21	3,1
B	-5	5	20	16	4,2
C	-5	5	15	12	3,4
D		-40	60	13	1,4

Выбор эффективных капиталовложений осуществляется в рамках выделенных для инвестиций средств компании-инвестора. Финансовые ресурсы компании по годам инвестиционного периода обозначим B_0, B_1 соответственно. Планируется в нулевой период выделить под проекты не менее B_0=10 усл.ед. и в первый период тоже B_1=10 усл. ед. Целью решения задачи является эффективное, с точки зрения извлечения прибыли, размещение капитала компании в инвестиционные проекты.

Целевая функция оптимизационной задачи представляет собой формулу расчёта эффективности капиталовложений различных вариантов распределения капитала в пределах выделенных для этого ресурсов. Так как инвестора интересует максимальная прибыль от вложенных денег, то правилом отбора вариантов в задаче оптимизации является выбор варианта с наибольшим значением целевой функции. Посредством сравнения между собой значений целевой функции для всех допустимых вариантов выбирается тот вариант, который даёт максимальное значение целевой функции. Этот вариант называется оптимальным планом капиталовложений компании-инвестора.

Чтобы оценивать варианты необходимо выбрать какую-либо методику подсчёта эффективности капиталовложений, то есть целевую функцию задачи оптимизации. Для оценки эффективности обычно используют одну из двух методик:

1. Расчёт чистой приведенной стоимости.
2. Расчёт индекса рентабельности.

Чистая приведенная стоимость применяется для оценки проектов по величине прироста капитала от их реализации. При расчёте индекса рентабельности учитывается эффект на единицу вложенного капитала.

В первом случае целевая функция представляет собой сумму чистых приведенных стоимостей по всем проектам и имеет вид:

$$F_x^{(1)} = 21x_1 + 16x_2 + 12x_3 + 13x_4 \to \max .$$

Во втором случае целевая функция представляет собой сумму индексов рентабельности по всем проектам:

$$F_x^{(2)} = 3{,}1x_1 + 4{,}2x_2 + 3{,}4x_3 + 1{,}4x_4 \to \max .$$

Выбор пакета проектом осуществляется в условиях ограничений финансовых ресурсов, которые имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 0x_4 \le 10; \\ -30x_1 + -5x_2 + -5x_3 + 40x_4 \le 10; \\ x_j \ge 0;\ x_j \le 1;\ \ j = 1,\ldots,4 . \end{gathered} \qquad (1)$$

Для каждого варианта математической модели с целевой функцией $F_x^{(1)}$ и $F_x^{(2)}$ получим оптимальное решение. Оптимальное решение для первого варианта: $F_x^{(1)*} = 36{,}25$; $x_1^* = 0{,}5$; $x_2^* = 1$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0{,}75$. Таким образом, для первого варианта оптимальный пакет состоит из финансирования проекта A на 0,5 его стоимости, финансирования проекта B в полном объёме и финансирования проекта D на 0,75. При этом чистая приведенная стоимость данного пакета инвестиций составляет 36,25.

Проведём анализ полученного плана капитальных вложений с целью выявления наиболее эффективного проекта (дающего наибольший прирост чистой приведенной стоимости) и определения инвестиционного периода, для которого общие капиталовложения в пакет дают наибольший эффект с точки зрения чистой приведенной стоимости. Для этого введём переменные y_i (показатели доходности капиталовложений) и сформулируем двойственную задачу:

$$F_y^{(1)} = 10y_1 + 10y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \to \min;$$

$$10y_1 - 30y_2 + y_3 \geq 21;$$

$$5y_1 - 5y_2 + y_4 \geq 16;$$

$$5y_1 - 5y_2 + y_5 \geq 12;$$

$$40y_2 + y_6 \geq 13;$$

$$y_i \geq 0; \quad i = 1,\ldots 6.$$

Решение двойственной задачи: $F_y^{(1)*} = 36{,}25$ ($F_y^{(1)*} = F_x^{(1)*}$); $y_1^* = 3{,}08$; $y_2^* = 0{,}32$; $y_3^* = 0$; $y_4^* = 2{,}25$; $y_5^* = 0$; $y_6^* = 0$. Для анализа воспользуемся третьей теоремой двойственности. Переменные y_3, y_4, y_5, y_6 являются показателями доходности проектов A,B,C и D. Максимальное значение имеет переменная y_4, следовательно, самым выгодным проектом пакета является проект B. Среди переменных y_1, y_2 наибольшее значение имеет y_1. Это означает, что в случае принятия решения об увеличении суммы капиталовложений в пакет, то это выгоднее всего сделать для нулевого периода.

Теперь будем рассматривать формирование пакета по критерию максимума индекса рентабельности, то есть при целевой функции

$$F_x^{(2)} = 3{,}1x_1 + 4{,}2x_2 + 3{,}4x_3 + 1{,}4x_4 \to \max.$$

Ограничения финансовых ресурсов те же, что и прежде (1). Решение задачи оптимизации: $F_x^{(2)*} = 8{,}3$; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 1$; $x_3^* = 1$; $x_4^* = 0{,}5$. Это означает, что по критерию максимума индекса рентабельности, оптимальный пакет должен состоять из проектов B,C и D, причём проекты B и C финансируются полностью, а проект D только наполовину. Рентабельность данного пакета составляет 8,3.

Проведём финансовый анализ пакета посредством решения двойственной задачи, которая имеет вид:

$$F_y^{(2)} = 10y_1 + 10y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \to \min;$$

$$10y_1 - 30y_2 + y_3 \geq 3{,}1;$$

$$5y_1 - 5y_2 + y_4 \geq 4{,}2;$$

$$5y_1 - 5y_2 + y_5 \geq 3{,}4;$$

$$40y_2 + y_6 \geq 1{,}4;$$

$$y_i \geq 0; \quad i = 1,\ldots 6.$$

Решение двойственной задачи оптимизации: $F_y^{(2)*} = 8{,}3$ ($F_y^{(2)*} = F_x^{(2)*}$); $y_1^* = 0{,}72$; $y_2^* = 0{,}03$; $y_3^* = 0$; $y_4^* = 0{,}8$; $y_5^* = 0$; $y_6^* = 0$.

Анализ полученных результатов показывает, что самым рентабельным в пакете является проект В, а наибольший доход на единицу инвестиций дают капиталовложения в нулевом периоде инвестиционной программы. Это совпадает с результатом анализа пакета инвестиций, сформированного по критерию максимума чистой приведенной стоимости.

Ранее мы рассматривали постановки задач, в которых предусматривалась возможность долевого участия инвесторов. Однако, компания - инвестор, определив своё оптимальное долевое участие в проектах, столкнулась с проблемой привлечения сторонних инвесторов и согласования с ними объёмов финансирования. Тогда, компания - инвестор принимает решение о полном финансировании проектов. Это привело к необходимости проведения расчётов оптимального пакета инвестиций при условии их полного финансирования. Для этого в математическую модель задачи добавляется условие целочисленности переменных. Ранее переменные могли принимать значения в диапазоне от 0 до 1. Теперь на них налагается условие целочисленности и они могут принимать только одно из двух значений: 0 или 1 (булевы переменные $x_j \in \{0;1\}$). Посмотрим как изменится содержание пакета инвестиций в этих условиях. Оптимальное решение по критерию максимума чистой приведенной стоимости (при $x_j \in \{0;1\}$): $F_x^{(1)*} = 34$; $x_1^* = 1$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 1$. Ранее результаты решения двойственной задачи показали, что наиболее выгодным проектом является проект В при долевом участии в проектах А и D. Однако, требование полного финансирования проектов привело к удалению из пакета проекта В и повышению доли участия в менее выгодных проектах А и D до единицы. В связи с этим, снизилась чистая приведенная стоимость пакета с 36,25 усл. ед. до 34 усл. ед. Оптимальное решение задачи по критерию максимума индекса рентабельности даёт следующие результаты (при $x_j \in \{0;1\}$): $F_x^{(2)*} = 7{,}6$; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 1$; $x_3^* = 1$; $x_4^* = 0$. В данном случае в пакете остался

наиболее рентабельный проект B, но удалён проект D, финансирование которого должно начинаться в периоде 1 за счёт получения прибыли от реализации проектов B и C. Тем самым снизилась общая рентабельность пакета с 8,3 усл. ед. до 7,6 усл. ед. Однако, капиталовложения делаются только в нулевом периоде, что в свою очередь, предоставляет возможность компании - инвестору распорядиться высвободившимися прибылями от проектов B и C в первом периоде с большей для себя выгодой.

Рассмотрим вопрос влияния рынков сбыта готовой продукции на формирование пакета инвестиций. Предположим, что по проектам A и C предполагается выпуск продукции одного и того же вида, причём по проекту A семь единиц, а по проекту C три единицы продукции. Анализ рынков сбыта показал, что потребность рынка в товарах этого вида составляет 5 единиц. Как это отразится на формировании пакета, например, по критерию чистой приведенной стоимости. В математическую модель задачи необходимо добавить ограничение на сбыт готовой продукции:

$$7x_1 + 3x_3 \le 5.$$

Эта задача имеет следующее решение (при $x_j \in \{0;1\}$): $F_x^{(1)*} = 28$; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 1$; $x_3^* = 1$; $x_4^* = 0$. Из-за ограниченности рынка сбыта проект A с большим объёмом выпуска продукции оказался вытесненным из пакета и заменён на наиболее эффективный в пакете проект B, но проект B, в отличие A, требует только половину капитальных вложений в период 0. Как было показано ранее капиталовложения в период 0 более эффективны, чем в период 1, поэтому проект D удалён из пакета и заменён на проект C.

В практической деятельности может возникнуть ситуация, когда заранее известно, что какие-либо два проекта не могут быть одновременно включены в пакет, то есть являются взаимоисключающими. В этом случает в математическую модель необходимо добавить дополнительное ограничение, которое отражало бы условие взаимоисключения проектов. Предположим, что проекты B и C являются взаимоисключающими. Это условие формулируется следующим образом. Суммарная инвестиция в оба проекта не может превышать единицу: $x_2 + x_3 \le 1$. Действительно, так как $x_2 \in \{0;1\}$ и $x_3 \in \{0;1\}$,то при $x_2 = 1$, x_3 может принять только значение равное нулю, и наоборот. Добавим это условие к предыдущей задаче с ограничением на рынок сбыта. Получим следующее решение: $F_x^{(1)*} = 16$; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 1$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0$. Теперь в пакете из-за несовместимости проектов B и C остался только один проект B, который ранее был определён как самый эффективный, но при этом резко снизилась отдача от пакета в целом. Это связано с тем, что инвестиция в пакет B составляет всего 5 единиц из 10 единиц инвестиционного бюджета в нулевом периоде. Казалось бы можно добавить пакет D в периоде 1, но это невозможно вследствие

того, что один проект B не даёт достаточно прибыли в период 1 для включения инвестиции в проект D.

Может возникнуть ситуация, когда заранее известно, что какой - либо проект является дополнением к другому проекту. То есть, один проект зависит от другого в том отношении, что его нельзя принять без включения в пакет основного проекта. Например, проект D является дополнением проекта A. Тогда, в систему ограничений задачи оптимизации следует включить условие: $-x_1 + x_4 \le 0$ при $x_1 \in \{0;1\}$ и $x_4 \in \{0;1\}$. Это означает, что если $x_1 = 1$, то x_4 может быть и 0 и 1, но если $x_1 = 0$, то x_4 обязательно равно нулю. Проиллюстрируем это на примере формирования оптимального пакета инвестиций по критерию максимума индекса рентабельности (без учёта ограничений по сбыту), включив дополнительно в математическую модель взаимоисключающее условие для проектов B,C и условие зависимости проектов A и D. Получим оптимальный пакет инвестиций с суммарным индексом рентабельности равным 4,5 усл. ед., состоящий из проектов A и D. По составу пакет совпал с пакетом инвестиций, сформированным по критерию максимума чистой приведенной стоимости без дополнительных условий.

Как мы видим, математическое моделирование является эффективным инструментом анализа и выбора инвестиционных проектов.