

УДК 502.08

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕХВАТЧИКОМ

Сокольников Александр Николаевич

ФГАОУ ВО «Московский государственный институт международных отношений
(университет) министерства Иностранных Дел Российской Федерации»

Одинцовский филиал, Одинцово, Московской области (Россия)

Доцент кафедры «Математических методов и бизнес-информатики», к.т.н., доцент

a.sokolnikov@odin.mgimo.ru

Аннотация

В статье предлагается рассмотрение задачи синтеза оптимального управления перехватчиком в свете современной теории, основанной на методе пространства состояний, описывающей системы и объекты дифференциальными уравнениями и использующей результаты теории оптимальной фильтрации и идентификации. Рассмотрены способы описания объекта управления, параметров, контролируемых в процессе управления, формирования управляющего воздействия исходя из заданного критерия качества управления, сформулированы требования к структуре системы оптимального управления.

Ключевые слова: теория оптимального управления, метод пространства состояний, уравнение состояния, уравнение измерения, терминальное управление, локальное управление, ошибка слежения.

FORMULATION OF THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL INTERCEPTOR

Alexandr N. Sokolnikov

Moscow State Institute of International Relations (University) of the Ministry of Foreign Affairs
of the Russian Federation» Odintsovo branch,

143000 Odintsovo the Moscow region, St. Novo-sportivnaia 3

Associate Professor of «Mathematical methods and business Informatics»

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

a.sokolnikov@odin.mgimo.ru

ABSTRACT

The article deals with the problem of synthesis of optimal control of the interceptor in the light of the modern theory based on the method of the state space, describing the systems and objects by differential equations and using the results of the theory of optimal filtration and identification. The methods of description of the control object, the parameters controlled in the process of control, the formation of the control action on the basis of a given criterion of control quality are considered, the requirements for the structure of the optimal control system are formulated.

Key words: optimal control theory, state space method, state equation, measurement equation, terminal control, local control, tracking error.

Введение

Классическая теория оптимального управления использует методы проектирования систем управления, опирающиеся на математический аппарат передаточных функций (синтез в частотной области). Рассмотрим подход к проектированию системы оптимального управления перехватчиком с точки зрения, современной теории, основанной на методе пространства состояний, описывающей системы и объекты дифференциальными уравнениями и использующей результаты теории оптимальной фильтрации и идентификации (синтез во временной области).

Для синтеза оптимального управления перехватчиком с использованием метода пространства состояний требуется знать [1]:

- 1) математическую модель обобщенного объекта управления (ООУ);
- 2) законы распределения вероятностей и вытекающие из них необходимые статистические характеристики случайных возмущений, действующих на ООУ;
- 3) измеряемые фазовые координаты ООУ, принимаемые радиосигналы и статистические характеристики помех, поступающих с полезными радиосигналами и выходными сигналами измерителей, размещенных на борту перехватчика;
- 4) условия работы синтезируемой системы управления и накладываемые на нее ограничения (допускаемые перегрузки, размер зон обзора РЛС, зон поражения ОК и др.).

В состав ООУ включают:

- 1) управляемый объект (УО) – перехватчик;
- 2) инерционные элементы управляющего устройства (исполнительные элементы управления);
- 3) модель, характеризующую параметры относительного движения перехватчика и цели или перехватчика и точки, за положением которой следит УО (кинематические уравнения, характеризующие движение двух точек).

В общем случае обобщенный объект управления описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ), однако, в некоторых практически важных случаях она может быть сведена к линейной системе с использованием приема линеаризации. Этот прием обычно применяют тогда, когда система управления перехватчиком функционирует с малыми погрешностями. Тогда нелинейное ДУ можно свести к линейному, раскладывая его правую часть в ряд по формуле Тейлора в окрестности «опорной траектории» с удержанием первых двух членов ряда [6].

Синтез оптимального управления перехватчиком

Постановка задачи синтеза оптимального управления перехватчиком с использованием метода пространства состояний формулируется следующим образом [5].

Объект управления задается векторно-линейным ДУ

$$\dot{\vec{X}}_1 = F_1 \vec{X}_1 + B_1 \vec{u} + \vec{\xi}_1, \quad (1)$$

где: \vec{X}_1 – вектор управляемых параметров ПР размера $(n_1 \times 1)$;

F_1 – динамическая матрица, описание которой отображают динамические свойства устройств формирования команд управления, размера $(n_1 \times n_1)$;

\vec{u} – вектор управления $(r \times 1)$, $r \leq n_1$;

B_1 – матрица управления, размера $(n_1 \times r)$;

$\vec{\xi}_1$ – вектор возмущений типа белых шумов, размера $(n_1 \times 1)$, с равным нулю математическим ожиданием и заданной корреляционной матрицей $K_{\xi 1}$

Кроме (1) задается линейное векторно-матричное ДУ, характеризующее модель изменения во времени параметров, за которыми нужно следить (например, за параметрами движения цели, параметрами сближения перехватчика с целью):

$$\dot{\vec{X}}_2 = F_2 \vec{X}_2 + \vec{\xi}_2, \quad (2)$$

где \vec{X}_2 – вектор отслеживаемых параметров, $(n_2 \times 1)$, (координаты и параметры цели относительно пункта выработки КУ);

F_2 – динамическая матрица размера $(n_2 \times n_2)$;

$\vec{\xi}_2$ – вектор возмущений типа белых шумов $(n_2 \times 1)$, с равным нулю математическим ожиданием и заданной корреляционной матрицей $K_{\xi 2}$.

Для сокращения записи (1) и (2) объединяют, введя расширенный вектор

$\vec{X} = (\vec{X}_1 / \vec{X}_2)$ размера $(n_1 + n_2) \times 1$, блочную матрицу $F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$ размера $(n_1 + n_2) \times (n_1 +$

$n_2)$, блочную матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix}$ размера $(n_1 + n_2) \times r$, расширенный вектор $\vec{\xi} = (\vec{\xi}_1 / \vec{\xi}_2)$

размера $(n_1 + n_2) \times 1$:

$$\dot{\vec{X}} = F \vec{X} + B \vec{u} + \vec{\xi}. \quad (3)$$

Векторно-матричное уравнение (3) называют уравнением состояния. Элементы матриц F и B являются функциями времени.

Для формирования, определяемого вектором \vec{u} алгоритма управления, необходимо измерить все или некоторую часть фазовых координат, входящих в (3). Поэтому, в дополнение к (3) вводится уравнение измерения, которое, как правило, является нелинейным, однако, при условии малости ошибок функционирования синтезируемой системы управления, также может быть линеаризовано относительно оценок $\hat{\vec{X}}$ вектора \vec{X} [2].

Линеаризованное уравнение измерения может быть задано в виде:

$$\vec{Y} = H(\hat{\vec{X}}) \vec{X} + \vec{\eta}, \quad (4)$$

где $H(\hat{\vec{X}})$ – матрица связи между оцениваемыми и измеряемыми параметрами,

вычисленная в точке $\hat{\vec{X}}$ (матрица частных производных от измеряемых нелинейных функций по компонентам вектора \vec{X});

$\vec{\eta}$ – вектор ошибок измерений размера $(m \times 1)$ с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной матрицей K_2 ;

\vec{Y} – вектор измеряемых параметров размера $(m \times 1)$, $m \leq n_1 + n_2$.

В реальных условиях составляющие вектора управления \vec{u} вследствие ограничений физических свойств перехватчика не могут быть произвольными, поэтому на них накладываются ограничения. Ограничения могут иметь один из следующих возможных видов:

$$\vec{u} \leq \vec{U} \quad (5)$$

$$M \left\{ \vec{u}^T K^{-1} \vec{u} \right\} \leq \rho_u(t) \quad (6)$$

$$\int_{t_0}^{t_K} M \left\{ \vec{u}^T K^{-1} \vec{u} \right\} d\tau \leq \alpha_u \quad (7)$$

где \vec{U} – заданное допустимое значение \vec{u} ;

$\rho_u(t)$ – скалярная функция времени или постоянная величина;

α_u – постоянная величина;

K^{-1} – заданная симметричная положительно определенная матрица размера $(r \times r)$;

t_0, t_K – моменты начала и окончания процесса управления.

Условие (5) означает, что любая составляющая вектора \vec{u} не может превышать заданного значения \vec{U} (ограничение на управление). Условие (6) ограничивает вектор управления в «среднем» (ограничение в среднем), а условие (7) определяет интегральное за время управления ограничение вектора управления в среднем (интегральное ограничение).

Кроме (3), (4) и одного из ограничений (5 – 7), для синтеза оптимального управления перехватчиком должен быть математически задан критерий качества функционирования синтезируемой системы оптимального управления.

При синтезе оптимального управления решают одну из следующих двух задач:

1. Определяют оптимальную систему, в которой экстремум критерия качества функционирования достигается в момент окончания заданного времени управления (терминальное управление).

2. Определяют оптимальную систему, в которой экстремум критерия качества функционирования достигается в каждый момент времени (локальное управление) [4].

В соответствии с решаемой задачей выбирается вид критерия качества: терминальный или локальный. Наиболее часто в качестве критерия качества используется квадратичный функционал качества, который при терминальном управлении имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{J}(t_K) = & M \left\{ \left[A_2 \vec{X}_2(t_K) - A_1 \vec{X}_1(t_K) \right]^T Q \left[A_2 \vec{X}_2(t_K) - A_1 \vec{X}_1(t_K) \right] \right\} + \\ & + M \left\{ \int_{t_0}^{t_K} \left[A_2 \vec{X}_2(t) - A_1 \vec{X}_1(t) \right]^T L \left[A_2 \vec{X}_2(t) - A_1 \vec{X}_1(t) \right] dt \right\} + \\ & + M \left\{ \int_{t_0}^{t_K} \vec{u}^T(t) K^{-1} u(t) dt \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где Q – заданная неотрицательно определенная симметричная матрица размера $n_3 \times n_3$;

K^{-1} – заданная положительно определенная матрица размера $r \times r$;

L – заданная неотрицательно определенная матрица размера $n_3 \times n_3$;

A_1, A_2 – заданные матрицы размерами $n_3 \times n_2, n_3 \times n_1$ соответственно;

n_3 – число составляющих вектора $\Delta A = A_2 X_2 - A_1 X_1$, которые учитываются в (8);

M – знак условного математического ожидания при заданной реализации $Y(t)$.

Матрица Q характеризует вес ошибок слежения в момент t_k (матрица штрафа по ошибкам).

Разность $\Delta A = A_2 \vec{X}_2 - A_1 X_1$ характеризует ошибку слежения управляемым вектором $\vec{X}_1(t_k)$ за отслеживаемым вектором $\vec{X}_2(t_k)$ в момент t_k .

Матрицы A_1, A_2 образуются чаще всего элементами со значениями 0 и 1, их вид определяется конкретными условиями.

В качестве ошибки слежения, например, может использоваться значения вектора промаха при $t = t_k$.

В (8) первое слагаемое характеризует квадратичную форму взвешенных ошибок слежения при $t = t_k$, второе слагаемое представляет взвешенную интегральную оценку качества переходных процессов, а третье слагаемое характеризует взвешенную интегральную квадратичную оценку вектора управления. При $K^{-1} = E$ третье слагаемое определяет среднюю энергию вектора.

При локальном управлении вид функционала качества аналогичен (8), но отличие состоит в том, что вместо конечного времени t_k используется текущее время t , соответственно переменная интегрирования равна τ .

Таким образом, задача синтеза ОУ сводится к поиску вектора управления \vec{u} при исходных данных (3), (4) и одном из ограничений (5)–(7) так, чтобы обеспечивался экстремум заданного критерия качества функционирования синтезируемой системы оптимального управления [3].

Так как вектор \vec{u} определяется как функция оцененных (измеренных) значений \hat{X} вектора \vec{X} , то помимо нахождения \vec{u} требуется синтезировать систему оценивания (измерения) составляющих \vec{X} . После нахождения оптимального закона управления $\vec{u}_{\text{опт}} = \vec{u} / \hat{J} = \hat{J}_{\text{ext}}$ и \hat{X} определяются:

- динамическая структурная схема синтезированной системы;
- точность ее функционирования;
- устойчивость;
- помехоустойчивость;
- чувствительность системы к отклонению ее параметров, а также параметров входных сигналов и возмущений, принятых в качестве расчетных при синтезе.

После этого решение задачи синтеза оптимального управления заканчивается.

При синтезе оптимального управления предполагается, что система (3) является управляемой и наблюдаемой.

Под управляемостью понимается возможность перевода системы (3) за конечное время из любого начального состояния $X_1(t_0)$ в любое конечное состояние $X_1(t_k)$ под действием вектора управления \vec{u} .

Под наблюдаемостью системы понимается сходимост корреляционной матрицы ошибок оценивания состояния системы (3) при $t \rightarrow \infty$ к ее теоретическому значению, которое является решением дифференциального уравнения $\dot{K}_X(t) = 0$.

Выводы

В соответствии с изложенным система оптимального управления перехватчиком должна состоять из линеаризованного фильтра, предназначенного для получения текущей оценки \hat{X} вектора состояния \vec{X} , и детерминированного оптимального

вычислителя, предназначенного для формирования вектора оптимального управления $\vec{u}_{\text{опт}}$.

Список литературы

1. Гриценко Н.С. Оценивание параметров движения маневрирующих объектов / Н.С. Гриценко, А.А. Кириченко, Т.А. Коломейцева, В.П. Логинов, И.Г.Тихомирова. - Зарубежная радиоэлектроника. - 1983. - №4.
2. Жиглявский А.А. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники / А.А. Жиглявский, А.Е. Красковский. - Изд-во Ленинградского университета, 1988. - 221 с.
3. Лебедев, А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях / А.Н. Лебедев. - Радио и связь. - 1989. - №.13. -С. 45 - 48.
4. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. - М.: Мир, 1989. - 278 с.
5. Пузырев В.А. Алгоритмы оценивания параметров движения летательных аппаратов / В.А. Пузырев, М.А. Гостюхина - Зарубежная радиоэлектроника. - 1981. - №4.
6. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. - М.: Наука, 1985. - 448 с.

References

1. Gritsenko N. S. The estimation of the motion parameters of the maneuvering object / N.S. Gritsenko, A. A. Kirichenko, T. A. Kolomeytsev, V. P. Loginov, I. G. Tikhomirov // Foreign radio electronics. - 1983. - №4 [in Russian].
2. Zhigljavsky A. A. Detection of discord of random processes in problems of radio engineering / A. A. Zhigljavsky, A. E. Kraskovsky. - Leningrad University publ., 1988. - 221 p [in Russian].
3. Lebedev, A. N. Modeling in scientific and technical research / A. N. Lebedev. - Radio and communication. - 1989. - №13 - p. 45 - 48 [in Russian].
4. Detection of changes in the properties of signals and dynamic systems. Ed. M. Bassville, A. Banvenista. - M.: World, 1989. - 278 p. [in Russian].
5. Puzyrev V. A. Algorithms for estimating the parameters of aircraft movement / V. A. Puzyrev, M. A. Gostyuhin // Foreign Radioelektronika. - 1981. - №4 [in Russian].
6. Fedoryuk M. V. Ordinary differential equations / M. V. Fedoryuk. - M.: Science, 1985. - 448 p. [in Russian].