Метод экспоненциальной аппроксимации для решения задач большой размерности

В.М. Гордуновский

МГИМО (Университет) МИД России, г. Москва

Рассматривается метод экспоненциальной аппроксимации для линейного программирования в применении к задачам большой размерности. Идея метода состоит в том, что исходная линейная задача заменяется нелинейной задачей с экспоненциальной целевой функцией и малым параметром, решение которой является приближением с заданной точностью решений исходной и двойственной линейных задач. Полученная задача имеет простые ограничения, выражающие условия неотрицательности для двойственных переменных, которые связаны с ограничениями типа неравенств в прямой задаче и не имеет ограничений двойственных переменных, связанных с ограничениями типа равенств. Рассмотрим задачу линейного программирования в следующей форме:

$$CX \to \min,\ AX \ge B^T,\ X \ge 0,$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - вектор переменных исходной задачи, $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - вектор коэффициентов линейной формы, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ - вектор ограничений, $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ -матрица коэффициентов. Исходная задача заменяется аппроксимирующей:

$$CX + \varepsilon\vartheta(X) \to \min,\ AX \ge B^T,\ X > 0,$$

где $\vartheta(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ln(x_j)$, ε -малый параметр, $\varepsilon > 0$. Для этой задачи двойственная имеет вид:

$$B\lambda - \varepsilon\sum_{j=1}^{n} e^{((\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j - \varepsilon)/\varepsilon)} \to \max,\ \lambda \ge 0,\ x_j = e^{((\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j - \varepsilon)/\varepsilon)},\ j = 1, ..., n.$$

Целевая функция имеет непрерывные производные любого порядка. Это свойство позволяет эффективно применять для поиска решения градиентные методы. Приводятся теоремы сходимости по

параметру ε к оптимальным значениям целевых функций исходной и двойственной линейных задач, а также к оптимальным значениям соответствующих прямых и двойственных переменных. Следствием теорем сходимости является определение диапазона значений параметра ε, который обеспечивает заданную погрешность δ вычисления оптимальных значений целевых функций прямой и двойственной исходных линейных задач $0 < \varepsilon \le e^2 n^{-1}\delta$.

Для решения задачи линейного программирования большой размерности методом экспоненциальной аппроксимации, матрица коэффициентов которой имеет блочно-диагональную структуру, вместо исходной, решается двойственная аппроксимирующая задача следующего вида:

$$\max_{\lambda_{i\in s}} \max_{\lambda_{i\in d_k},\ k=1,\dots,q} \Big(\sum_{i\in s} b_i\lambda_i + \sum_{i\in d_{k,\,k=1,\dots,q}} b_i\lambda_i - \varepsilon \sum_{j\in p_{k,\,k=1,\dots,q}} e^{\left(\left(\sum_{i\in s} a_{ij}\lambda_i + \sum_{i\in d_k} a_{ij}\lambda_i - c_j - \varepsilon\right)/\varepsilon\right)}\Big),$$

$$\lambda_i \ge 0,\ i\in s,\ i\in d_k,\ k=1,\dots,q,\ \varepsilon > 0,$$

$$x_j = e^{\left(\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j - \varepsilon\right)/\varepsilon\right)},\ j=1,\dots,n.$$

где s - множество связывающих ограничений; d_k - множество ограничений k - го блока, p_k - множество переменных k - го блока, q - количество блоков.

Вычислительный алгоритм представляет собой покоординатный подъём по группам двойственных переменных связывающих и блочных ограничений. Сначала фиксируются связывающие переменные $\lambda_i \ge 0$, $i\in s$, по блочным переменным находим максимум целевой функции, затем фиксируем блочные $\lambda_i \ge 0$, $i\in d_k,\ k=1,\dots,q,$ находим максимум по связывающим, и так продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. Приводятся решения конкретных вычислительных задач.