Алгоритм экспоненциальной аппроксимации для задач линейного программирования

В.М. Гордуновский
МГИМО (Университет) МИД России, Москва, Россия

Алгоритм определяет безитеративную процедуру вычисления оптимального решения задачи линейного программирования, которую будем рассматривать в следующей форме: $\sum_{j=1}^{n} \hat{c}_j \hat{x}_j \to \min,\ \hat{x} \in R^n,$ $\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}\hat{x}_j = \hat{b}_i,\ i \in I\ , I = \{1,\dots,m\},\ \hat{x}_j \geqslant 0,\ j \in J,\ j = \{1,\dots,n\},$ где $\hat{x}_j,\ j \in J$ – переменные исходной задачи, $\hat{c}_j > 0,\ j \in J$ – коэффициенты линейной формы, $\hat{a}_{ij} \geqslant 0,\ i \in I,\ j \in J$ – коэффициенты ограничений, $\hat{b}_i > 0,\ i \in I$ – правые части ограничений. Предполагается, что задача имеет решение. Преобразуем её к виду: $F = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min,\ x \in R^n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 1,\ i \in I,\ 0 \leqslant x_j \leqslant e^{-1},\ j \in J.$ Для этого заменим константы и переменные на новые в следующей последовательности: 1) коэффициенты ограничений и их правые части делим на $\hat{b}_i$, получим $\sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{a}_{ij}}{\hat{b}_i}\hat{x}_j = 1, i \in I$; 2) заменяем исходные переменные $\hat{x}_j$ на $\bar{x}_j = \frac{\hat{x}_j}{x_j^{max}e}$, $x_j^{max} = \max\limits_i \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}}(\hat{a}_{ij} \neq 0),\ j \in J,$ после этого коэффициенты ограничений и целевой функции принимают вид: $\bar{a}_{ij} = e\frac{\hat{a}_{ij}}{\hat{b}_i}x_j^{max},\ \bar{c}_j = e\hat{c}_j x_j^{max},\ i \in I,\ j \in J$; 3) коэффициенты целевой функции заменяем на $c_j = \frac{\bar{c}_j}{c^{max}},\ j \in J,\ c^{max} = \max\limits_j \bar{c}_j$; 4) заменяем переменные $\bar{x}_j$ на $x_j = \bar{c}_j\bar{x}_j$, получаем: $a_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{c}_j},\ i \in I,\ j \in J.$ Соответствующая двойственная задача: $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \to \max,\ \lambda \in R^m,$ $y_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - 1 \leqslant 0,\ j \in J.$

Задачу линейного программирования заменяем на аппроксимирующую функцию экспоненциального вида [1], [2]: $\varphi(\tilde{\lambda},\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i - \varepsilon\sum_{j=1}^{n} \exp((\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{\lambda}_i - 1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}) \to \max, \tilde{\lambda} \in R^m, \tilde{x}_j(\tilde{\lambda},\varepsilon) = \exp((\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{\lambda}_i - 1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}),\ \ j \in J,\ \varepsilon > 0$ (1). При $\varepsilon \to 0$ оптимальное значение аппроксимирующей функции $\varphi(\tilde{\lambda},\varepsilon)$ сходится к оптимальным значениям целевых функций прямой и двойственной линейных задач: $\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \to \sum_{j=1}^{n} x_j^*,\ \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*$ и $\tilde{x}_j \to x_j^*, \tilde{\lambda}_i \to \lambda_i^*,$ где $x_j^*,\ \ j \in J,\ \ \lambda_i^*,\ \ i \in I$ – оптимальные решения прямой и двойственной линейных задач [2]. Необходимым и достаточным условием максимума строго вогнутой функции $\varphi(\tilde{\lambda},\varepsilon)$ является равенство ну-

лю производных $\frac{\partial\varphi(\tilde{\lambda},\varepsilon)}{\partial\tilde{\lambda}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j(\tilde{\lambda},\varepsilon) - 1 = 0,\ \ i \in I$. Разложим функции $\tilde{x}_j(\tilde{\lambda},\varepsilon)$ в степенной ряд по степеням $((\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{\lambda}_i - 1) - \varepsilon)$, $j \in J$ до производной первого порядка. Теперь необходимые и достаточные условия имеют вид: $\sum_{k=1}^{m}\tilde{\lambda}_k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \varepsilon = 0$, $i \in I$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем аппроксимирующую систему линейных уравнений для вычисления двойственных аппроксимирующих переменных: $\sum_{k=1}^{m}\tilde{\lambda}_k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $i \in I$ (2).

Переменные $\tilde{y}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{\lambda}_i - 1$ в (1) являются аппроксимацией двойственных ограничений $y_j \leqslant 0$. Если ограничение активно, то $\tilde{y}_j$ достигает своей максимальной величины и соответствующее значение x_j является оптимальным решением x_j^*. Таким образом, $\max\limits_j \tilde{y}_j$ определяет индекс j оптимального решения x_j^*. Далее, исключая переменную x_j из целевой функции и ограничений задачи линейного программирования, получаем задачу меньшей размерности и вычисляем следующий индекс j оптимального решения x_j^*.

Применение алгоритма иллюстрирует следующий вычислительный пример: $\sum_{j=1}^{5}\hat{c}_j\hat{x}_j \to \min$, $\sum_{j=1}^{5}\hat{a}_{ij}\hat{x}_j = \hat{b}_i$, $i = 1,2,3$, $\hat{x}_j \geqslant 0$, $j = 1,\ldots,5$, $(\hat{c}_j) = (1\ 2\ 0{,}7\ 2\ 4)$, $(\hat{b}_i) = (1\ 4\ 2)$, $(\hat{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 2{,}0 & 3{,}0 \\ 0{,}3 & 4{,}0 & 0{,}3 & 3{,}0 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}1 & 3{,}0 & 1{,}0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Решение исходной линейной задачи: $\sum\limits_{j=1}^{5}\hat{c}_j\hat{x}_j^* = 2{,}4367$, $(\hat{x}_j^*) = (0{,}0\ 0{,}7597\ 0{,}5530\ 0{,}2651\ 0{,}0)$. После преобразований, описанных выше, получаем: $F = \sum_{j=1}^{5} x_j \to \min$, $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_j = 1$, $i = 1,2,3$, $0 \leqslant x_j \leqslant e^{-1}$, $j = 1,\ldots,5$, $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 108{,}7313 & 21{,}7463 & 46{,}5991 & 108{,}7313 & 81{,}5485 \\ 8{,}1549 & 54{,}3656 & 11{,}6498 & 40{,}7742 & 3{,}3979 \\ 54{,}3656 & 2{,}7183 & 232{,}9956 & 27{,}1828 & 2{,}7183 \end{pmatrix}$. Решение: $\sum\limits_{j=1}^{5} x_j^* = 0{,}0224$, $(x_j^*) = (0{,}0\ 0{,}0140\ 0{,}0036\ 0{,}0049\ 0{,}0)$, $(\lambda_i^*) = (0{,}0019\ 0{,}0175\ 0{,}0030)$, $(y_j^*) = (-0{,}4879\ 0{,}0\ 0{,}0\ 0{,}0\ -0{,}7792)$. Аппроксимирующая система (2): $\begin{pmatrix} 32939{,}5073 & 7322{,}3284 & 20005{,}0400 \\ 7322{,}3284 & 4831{,}9243 & 4423{,}0664 \\ 20005{,}0400 & 4423{,}0664 & 57996{,}2489 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 367{,}3564 \\ 118{,}3423 \\ 319{,}9806 \end{pmatrix}$. Теперь вычисляем значения двойственных аппроксимирующих переменных $(\tilde{\lambda}_i) = (0{,}0073\ 0{,}0115\ 0{,}0021)$ и ограничений $(\tilde{y}_j) = (0{,}0043\ -0{,}2119\ -0{,}0318\ 0{,}3206\ -0{,}3586)$. Наибольшее значение $\tilde{y}_4 = 0{,}3206$ определяет индекс $j = 4$ оптимального решения x_4^*. Далее исключаем переменную x_4 из целевой функции F и

матрицы ограничений $\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_j = 1, i = 1,2,3$ и преобразуем к виду: $\sum_{j=1,2,3,5} x_j \to \min$, $\sum_{j=1,2,3,5} a_{ij}x_j = 1$, $i = 1,2$, $0 \leqslant x_j \leqslant e^{-1}$, $j = 1,2,3,5$, $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3{,}8423 & 233{,}4043 & 115{,}6802 & 67{,}9846 \\ 209{,}1373 & 119{,}6861 & 420{,}1277 & 94{,}1167 \end{pmatrix}$. Пересчитываем коэффициенты аппроксимирующей системы (2). Получаем: $\begin{pmatrix} 72496{,}1231 & 83737{,}7412 \\ 83737{,}7412 & 243428{,}4278 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420{,}9113 \\ 843{,}0678 \end{pmatrix}$. Решение: $(\tilde{\lambda}_i) = \begin{pmatrix} 0{,}0030 & 0{,}0024 \end{pmatrix}$, $(\tilde{y}_j) = \begin{pmatrix} -0{,}4797 & -0{,}0095 & 0{,}3686 & -0{,}5674 \end{pmatrix}$. Наибольшее значение $\tilde{y}_3 = 0{,}3686$ определяет индекс $j = 3$ оптимального решения x_3^*. Исключаем переменную x_3 из целевой функции и системы ограничений, преобразуем линейную задачу к виду: $\sum_{j=1,2,5} x_j \to \min$, $\sum_{j=1,2,5} a_{ij}x_j = 1$, $i = 1$, $0 \leqslant x_j \leqslant e^{-1}$, $j = 1,2,5$, $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0{,}4071 & 415{,}1550 & 173{,}0553 \end{pmatrix}$. Пересчитываем коэффициенты аппроксимирующей системы (2). Получаем: $\begin{pmatrix} 202301{,}9342 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 588{,}6174 \end{pmatrix}$. Решение аппроксимирующей системы (2): $(\tilde{\lambda}_1) = \begin{pmatrix} 0{,}0029 \end{pmatrix}$, $(\tilde{y}_j) = \begin{pmatrix} -0{,}9988 & 0{,}2079 & -0{,}4965 \end{pmatrix}$. Наибольшее значение $\tilde{y}_2 = 0{,}2079$ определяет индекс $j = 2$ оптимального решения x_2^*. Таким образом, переменные x_2, x_3, x_4 являются базисом оптимального решения. В исходной системе ограничений оставляем только 2, 3 и 4 столбцы. Полученная система линейных уравнений определяет оптимальные значения базисных переменных. Окончательно, решение исходной задачи линейного программирования: $\sum\limits_{j=1}^{5} \hat{c}_j \hat{x}_j^* = 2{,}4367$, $(\hat{x}_j^*) = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}7597 & 0{,}5530 & 0{,}2651 & 0{,}0 \end{pmatrix}$.

Список литературы

1. Гордуновский В.М. Метод экспоненциальной аппроксимации для решения задач большой размерности // Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 220 – 222.
2. Гордуновский В.М. Метод экспоненциальной аппроксимации для планирования транспортной деятельности // Наука и экономика. 2010. № 2. С. 77 – 81.